



TITLE:

話題提供 : 数式処理システムをめぐって(数式処理と数学研究への応用)

AUTHOR(S):

金田, 康正

CITATION:

金田, 康正. 話題提供 : 数式処理システムをめぐって(数式処理と数学研究への応用). 数理解析研究所講究録 1983, 486: 195-211

ISSUE DATE:

1983-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103455>

RIGHT:

15.

話題提供

— 数式処理システムをめぐって —

東京大学大型計算機センター 金田 康正

(Yasumasa Kanada)

1. はじめに

最近、英国ケンブリッジ大学（以後ケンブリッジ大学と略す。）で作成された、積分パッケージ及び因数分解パッケージを使用する機会があった。その時の使用経験にもとづいた話題提供である。まず始めに、

1) 大学学期末試験問題による積分パッケージの機能評価について述べ、次に

2) 二次の線型微分方程式の変形理論への因数分解パッケージの利用と、パッケージの実用性についてについて述べる。

今回使用したソフトウェアは、以下に示す性格を持つものである。使いかたを向上させた後、東京大学大型計算機センターを通じて公開されるので、大いに利用いたがまう。

a) IBM 360/370 用の BCPL (一部改良を行な、2 ある) と少

しのアセンブラーで記述してありLISP処理系によつて駆動される¹⁾REDUCE²⁾の数式処理システム³⁾。(現在、A.C. Hearn が配布している版と比較してみると少し古い。しかし特殊な事を行わなければならないが、使用上何の問題もない。)従つて、他機種への書き替えは困難である。

b) 積分パッケージで使用しているアルゴリズムの説明は文献³⁾に示してある。

c) 因数分解パッケージは、A.C. Norman が作成したものであるが、アルゴリズムについての解説は今の所公にされてはいないようである。

d) 積分パッケージと因数分解パッケージとを同時に使用する事は不可能である。

e) 1980年10月に、今回使用したソフトウェア全体を入手した。

f) 両パッケージとも、500Kバイト程度のメモリーでも動作するが、カーベージコレクション、I/O等のオーバーヘッドが多くなり、実用的見地からはあまりおすすめでない。

2. 積分パッケージの機能評価

計算機による積分プログラムとして有名なSAINT⁴⁾は、MIT

の J. Slagle により、1960 年頃に作成された。このプログラムは、その当時に作られたばかりの LISP 言語で書かれ、IBM 7090 計算機の上で動作していた。プログラムの占める大きさは、3kw の作業用領域を含め 10kw であり、その実力は、当時の MIT における 54 題の freshman calculus examination を含む全 86 題の問題のうち 84 題を解いたことにおしほかれよう。平均解答時間は、IBM 7090 を用いて 2.4 分であり、一番時間がかかからないのは、

$$\int \frac{1}{x} dx$$

の計算で 0.03 分、一番時間がかかっているのは、

$$\int \frac{\sec^2 t}{1 - \sec^2 t - 3 \tan t} dt$$

の 18 分であり、

Slagle は、発見的方法（試行錯誤）による解法でプログラムしたが、その後 1960 年代後半から 1960 年代前半にかけ、積分アルゴリズムは大きく進歩した。この新しいアルゴリズムによる解法をインプリメントしたものが今回評価したパッケージである。評価試験用の問題として採用したのは、ある工系私立大学の教養部で単位認定の為に用いられていた試験問題 78 題である。（尚これを全部解くには、人手一現役の学生一人で約 1 時間かかる。）

試験結果から言うと、75 題が何らかの解を出した。解の出

なか、た3題は、未定義関数 (DESPARSE) を呼んでゐた為である。平均計算時間は、HITAC M-200H で 126ms. 一番時間がかかったのは、

$$\int \frac{1}{2} (\cos \frac{9}{8}x + \cos \frac{3}{8}x) dx$$

の 474 ms. 一番時間がかかったのは、

$$\int \frac{1}{9+x^2} dx$$

の 26ms である。付録 1 にいくつかの計算例を示しておくので参考にされたい。

予想されてゐたことであるが、パッケージの答と人手による答は全2が合致してゐた。人手の答が違つてゐたものもあるが、入力ミスで別の計算をしてゐたものもあった。人手でも機械でも結果は正しいが、表現が違つてゐるものを以下にいくつか選び出すことで、積分を行なう場合の問題を明らかにしてみよう。

$$\begin{array}{l} \textcircled{\circ} \left\{ \begin{array}{ll} \text{問題} & \int (\cos x)(\sin 2x) dx \\ \text{人手解} & -\frac{2}{3} \cos^3 x + C \\ \text{機械解} & \frac{1}{3} (-2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x) + C \end{array} \right. \end{array}$$

人間は、問題を $-2 \int \cos^2 x (\cos x)' dx$ と見なして計算したが、プログラムの三角関数の積と和の形に変形し、その後部分積分してゐる。

① { 問題 $\int \frac{1}{\sin x} dx$
 人手解 $-\frac{1}{2} \log \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right| + C$
 機械解 $\log \left(\tan \frac{x}{2} \right) + C$

人間は、 $\int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{1-\cos^2 x} dx$
 $= -\int \left(\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} \right) \frac{1}{2} (\cos x)' dx$

と変形してやる。両方とも正しゅうが、どちらが望ましゅうかは、結果をどのように使うかに依存する。(機械解は絶対値をとる、という事に注意。)

② { 問題 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$
 人手解 $\log |x + \sqrt{x^2+4}| + C$
 機械解 $\frac{1}{2} \log \{-\log(\sqrt{x^2+4}-x) + \log(\sqrt{x^2+4}+x)\} + C$

人間は公式を用いて結果を出してやる。機械解をもう少し変形すれば人手解と同じになるが、ここまで簡約化すれば良いのか、判断を自動的にやるのは困難。

③ { 問題 $\int (1-e^x)^4 e^x dx$
 人手解 $-\frac{1}{5} (1-e^x)^5 + C$
 機械解 $\frac{1}{5} \{e^x (e^{4x} - 5e^{3x} + 10e^{2x} - 10e^x + 5)\} + C$

人間は展開せずに直接に解を出した。機械は展開後部分積分を行なう、というが、こうなると、因数分解ル-4ノドある、それも $\frac{1}{5} (1-e^x)^5$ の形にもとめるのは困難である。

3. 二次の線型微分方程式の変形理論への因数分解パッケージの利用

今回問題になった変形理論は文献5, 6にあるので参考にしたい。結論から言えばある理論の証明を行おう為に、2変数 x, y の2つの有理関数

$$\begin{cases} u = \varphi(x, y) \\ v = \psi(x, y) \end{cases}$$

に対し、Jacobi 行列式が恒等的に1であること、すなわち

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \equiv 1$$

を示したいのである。ここで φ, ψ は5個のパラメータ t, a, b, c, d を含み、 φ は次のように書かれる：

$$\varphi(x, y) = \frac{U(x, y)}{V(x, y)}.$$

ただし

$$\begin{aligned} U(x, y) = & -dA^2((a+b+c)x^2 - (a+b+c+d)(t+1)x + (b+c+dt)) \\ & + AB((a+b+c-2d)x - ((a+b)t + a+c)) \\ & - AC\left(\frac{1}{2}(2x-t-1)y - (a+b+c+2d)\right) \\ & + B^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(x, y) = & A(dA((a+b+c+3d)x - ((c+d)t + (b+d))) \\ & - (a+b+c+2d)B \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} C y),$$

A, B, C は

$$A = (x^3 - (t+1)x^2 + tx)y - (a+b+c)x^2 + ((a+b)t + a+c)x - at.$$

$$\begin{aligned} B = & \frac{1}{4} (x^3 - (t+1)x^2 + tx) (3x^2 - 2(t+1)x + t) y^2 \\ & - \frac{1}{2} (5(a+b+c)x^4 - 4((2a+2b+c)t + 2a+b+2c)x^3 \\ & + 3((a+b)t^2 + (4a+2b+2c)t + a+c)x^2 \\ & - 2t((2a+b)t + 2a+c)x + at^2) y \\ & + ((a+b+c)x^2 - ((a+b)t + a+c)x + at) x \\ & (2(a+b+c)x - ((a+b)t + a+c)) \\ & + (a+b+c+d) d (x^3 - (t+1)x^2 + tx). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C = & \frac{1}{2} (x^3 - (t+1)x^2 + tx)^2 y^2 \\ & - \frac{3}{2} (x^3 - (t+1)x^2 + tx) ((a+b+c)x^2 - ((a+b)t + a+c)x + at) y \\ & + ((a+b+c)x^2 - ((a+b)t + a+c)x + at)^2. \end{aligned}$$

$\varphi(x, y)$ は、

$$\varphi(x, y) = - \frac{dA(u-x)^2 + B(u-x) + C}{A u(u-1)(u-t)}.$$

ここで

$$u = \varphi(x, y).$$

説明すべきことは簡単である。7変数の式を微分したり、積をとったりするわけで、メモリーの問題になりそうであることが予想された。まずはためしにと簡単なプログラムで試してみたい（これが大事。こうじゃないか、ああじゃない

かという心配は、242からすればよい。まさに「案ずるより産むが易し」である。)やはりパンクしてしまった。「メモリーは7474精神」のモットーで、①なるべく式を展開しないように、②二度以上の繰り返しの計算をさける為にまず変数に置きかえ整理した後、変数に値を代入する、③式のくくりおきが可能ならば、できるだけくくりおきを行なう、といった手法を用い、メモリーパンクをおさえながらやると、

$$VAL = \left(\begin{vmatrix} 4x & 4y \\ 4x & 4y \end{vmatrix} - 1 \right) * \left(\begin{vmatrix} 4x & 4y \\ 4x & 4y \end{vmatrix} \text{の分母} \right)$$

の式が展開できるようにした。あとはこれが恒等的にゼロであることを示せばよいのである。——しかしながら常にうまくいくとは限らない。

- ① a, b, c, d, t, x, y に適当な数値をいれ、 VAL を数値計算し、それが0であることを示す方法。(n 次多項式が $n+1$ 点で0の値をもてば、その多項式は恒等的に0であるということを利用する。) → もし0にならなければ、恒等式が成立しないことを示すので、理論がおかしなことになる。いくつかの場合で0になれば、恒等式が成立していいんだということを保障してくれ。今の場合、変数の次数が高く、 a, b, \dots に $2, 3, \dots$ といった値を代入しても倍長整数用にメモリーをとられちゃう。また計算に

時間がかかり、2 しまうので、この方法の使用はあきらめなければならなかった。

- ②①における数値の倍長化をさけるために数値を適当な modulus で基本整数におさえこんでやる方法がある。
この場合、VAL の次数が高く、計算時間がかかりうな
のでこれも採用しなかった。(これは場合によ、2 は有効な方法となる。)

さるこで登場するものが因数分解パッケージである。ために
に因数分解をやったところ、VAL は、

$$U(x, y), V(x, y)^2, V(x, y) - U(x, y)$$

$$T * V(x, y) - U(x, y), A(x, y)^2$$

のそれぞれで割り切れることが判明した。(本当に因子かとい
うかは、割り切れるかどうかや、2 みれば良い。)この時の商
を VAL1 としたところ、VAL1 は $A(x, y)$ に関し 26 次の式
になり、

VAL1 の $A(x, y)$ の 0 次	の項は $B(x, y)$ の 5 次で	}	割り切れる	
" 1	" 4			"
" 2	" 3			"
" 3	" 2			"
" 4	" 1			"

ことが、因数分解の結果判明した。しかしここまできても、
項の数は激減していろいろものの、正攻法ではいっきに展開でき
ない。(いかに大きな項式か!) VAL1 をいろいろ会話的

にいいところ、付録2の後半部分に示す性質があることが判明した。以上をプログラムし、バッチジョブで一括処理したところ、めでたく VAL1 が 0 になった。HLISP - REDUCE でもチェックし、正しく 0 になった。これで、めでたしめでたし。証明が完了！ 計算機による計算は、木村先生の未完の手計算を完全にフォローしていることが、その後判明し、その面から理論は正しいことが証明された。

4. おわりに

以上の経験により次のことが言えよう。

- ◎ 得られた式の表現上の問題があるが、バカチョン式に積分パッケージを使うことには、問題がある。
- ◎ 因数分解は、式変形の強力な助っ人である。
- ◎ 少し手をめくと、メモリーに関する制限で展開はうまくゆかなくなる。
- ◎ 会話で見通しを立て、長時間実行はバッチで行なう方法は効果的である。
- ◎ 会話処理において、REDUCE から抜け出すことなく、割り込みをかけられることは、会話において是非とも必要な機能である。
- ◎ 現状では、処理速度、利用可能メモリーの点で、最先端

の研究に利用するには、数式処理の力不足を感じる。

文 献

- 1) J. P. Fitch and A. C. Norman : "Implementing LISP in a High-level Language", Soft. - Practice and Exp. Vol. 7 (1977) 713 ~ 725
- 2) A. C. Hearn : "REDUCE 2 User's Manual", UCP-19, Computational Physics Group, University of Utah, Salt Lake City, Utah (1973 March)
- 3) J. H. Davenport : "On the Integration of Algebraic Functions". Lecture Notes in Computer Science. 102. Springer-Verlag, 1981
- 4) J. R. Slagle : "A heuristic program that solves symbolic integration problem in freshman calculus", J. ACM 10, 4 (Oct. 1963) pp. 507 ~ 520
- 5) T. Kimura : "On the Isomonodromic Deformation for Linear Ordinary Differential Equation of the Second Order" Proc. Japan Academy, 57 Ser. A, 6 (1981) pp. 285 ~ 290
- 6) T. Kimura : "On the Isomonodromic Deformation for Linear Ordinary Differential Equations of the Second

Order. II" Proc. Japan Academy, 58 Ser. A, 7(1982)

pp. 294~297

付録1. 積分パッケージの使用例

```
INT(COS(T)*SIN(2*T),T);
```

```
POTENTIAL CANCELLATION DETECTED
```

```
POTENTIAL CANCELLATION DETECTED
```

```
POTENTIAL CANCELLATION DETECTED ← 意味不明
```

```
(TIME TAKEN 265 MILLISECONDS)
```

```
( - 2*COS(2*T)*COS(T) - SIN(2*T)*SIN(T) + 2)/3
```

```
Time increment = 0.28+0.51 seconds. Total = 2.21+4.65
```

ユーザー-サービス時間、システム時間(ABC, I/O, プログラムロード, etc.)

```
INT(((SIN X**3)*(COS X**2)),X);
```

```
POTENTIAL CANCELLATION DETECTED
```

```
(TIME TAKEN 335 MILLISECONDS)
```

```
(3*COS(X)*SIN(X)4 - COS(X)*SIN(X)2 - 2*COS(X) - 2)/15
```

```
Time increment = 0.35+0.11 seconds. Total = 6.03+6.08
```

```
INT((COS X / SIN X**2),X);
```

```
POTENTIAL CANCELLATION DETECTED
```

```
(TIME TAKEN 123 MILLISECONDS)
```

```
( - 1)/SIN(X)
```

```
Time increment = 0.13+0.11 seconds. Total = 6.17+6.19
```

```
INT((1/(4-X**2)**(1/2)),X);
```

```
(TIME TAKEN 176 MILLISECONDS)
```

```
(i*(LOG(SQRT(-X2 + 4) - i*X) - LOG(lastsqrt + i*X)))/2
```

```
Time increment = 0.12+0.20 seconds. Total = 6.87+6.61
```

```
INT((1/(X**2-4)**(1/2)),X);
```

```
(TIME TAKEN 190 MILLISECONDS)
```

```
( - LOG(SQRT(X2 - 4) - X) + LOG(lastsqrt + X))/2
```

```
Time increment = 0.20+0.15 seconds. Total = 8.22+8.10
```

INT((1/(2**2-4)**(1/2)),X);
THE FOLLOWING QUADRATIC DOES NOT SEEM TO FACTOR

2
(A) - 2

(TIME TAKEN 355 MILLISECONDS)

$(\text{SQRT}(2) * (-\text{LOG}(\text{SQRT}(X^2 - 2) - X) + \text{LOG}(\text{lastsqrt} + X))) / 4$

Time increment = 0.37+0.48 seconds. Total = 10.35+10.52

INT((1/(X**2-9)),X);
(TIME TAKEN 32 MILLISECONDS)

$(\text{LOG}(X - 3) - \text{LOG}(X + 3)) / 6$

Time increment = 0.04+0.12 seconds. Total = 0.98+1.29

INT((1/((-3)-2**2)),X);
(TIME TAKEN 45 MILLISECONDS)

$(- \text{ATAN}((\text{SQRT}(2) * \text{SQRT}(3) * X) / 3) * \text{SQRT}(2) * \text{SQRT}(3)) / 6$

Time increment = 0.06+0.12 seconds. Total = 1.40+2.29

INT((1/(9+(2-X)**2)),X);
(TIME TAKEN 32 MILLISECONDS)

$\text{ATAN}((X - 2) / 3) / 3$

Time increment = 0.04+0.12 seconds. Total = 1.79+2.77

INT((1/(6*X-9**2-4)),X);
(TIME TAKEN 42 MILLISECONDS)

$(- \text{ATAN}((3 * \text{SQRT}(3) * X - \text{lastsqrt}) / 3) * \text{lastsqrt}) / 9$

Time increment = 0.05+0.12 seconds. Total = 1.94+3.01

INT(X**3*LOG(X),X);
POTENTIAL CANCELLATION DETECTED
(TIME TAKEN 36 MILLISECONDS)

4
 $(X * (4 * \text{LOG}(X) - 1)) / 16$

Time increment = 0.05+0.11 seconds. Total = 0.18+0.78

INT((LOG X)**2,X);
POTENTIAL CANCELLATION DETECTED
(TIME TAKEN 37 MILLISECONDS)

2
 $X * (\text{LOG}(X) - 2 * \text{LOG}(X) + 2)$

Time increment = 0.05+0.11 seconds. Total = 0.33+1.12

INT(X**3*E**X,X);
POTENTIAL CANCELLATION DETECTED
(TIME TAKEN 40 MILLISECONDS)

X^3
 $E * (X^3 - 3 * X^2 + 6 * X - 6)$

Time increment = 0.05+0.10 seconds. Total = 0.57+1.67

```
INT(E**X/(1-E**(2*X)),X);
POTENTIAL CANCELLATION DETECTED
(TIME TAKEN 66 MILLISECONDS)
```

$$(-\log(E^X - 1) + \log(E^X + 1))/2$$

Time increment = 0.08+0.12 seconds. Total = 0.92+2.23

```
INT(1/((X-3)*(X+5)),X);
(TIME TAKEN 34 MILLISECONDS)
```

$$(\log(X - 3) - \log(X + 5))/8$$

Time increment = 0.05+0.13 seconds. Total = 1.18+2.64

```
INT(1/((1+2*X)*(3+4*X)),X);
(TIME TAKEN 45 MILLISECONDS)
```

$$(\log(8*X + 4) - \log(8*X + 6))/2$$

Time increment = 0.06+0.11 seconds. Total = 1.50+3.29

```
INT(1/((4-X**2)*(4+X**2)),X);
(TIME TAKEN 65 MILLISECONDS)
```

$$(2*ATAN(X/2) - \log(X - 2) + \log(X + 2))/32$$

Time increment = 0.08+0.18 seconds. Total = 1.70+3.72

```
INT(1/((1-X)*(1+X**2)),X);
(TIME TAKEN 56 MILLISECONDS)
```

$$(2*ATAN(X) + \log(X^2 + 1) - 2*\log(X - 1))/4$$

Time increment = 0.07+0.17 seconds. Total = 1.93+4.14

付録2.

理論式の証明に使用した REDUCE プログラムリストの例

```
OPERATOR PHAI,PSAI,U,AA,BB,CC,AC,B1,B2$
OFF EXP$
PHAI(X,Y):=U(X,Y)/U(X,Y)$
CC(X,Y):=AA(X,Y)*AC(X,Y)$
PSAI(X,Y):=-(D*AA(X,Y)*(PHAI(X,Y)-X)**2+BB(X,Y)*(PHAI(X,Y)-X)+CC(X,Y))
              /(AA(X,Y)*PHAI(X,Y)*(PHAI(X,Y)-1)*(PHAI(X,Y)-T))$
UAL:=DF(PHAI(X,Y),X)*DF(PSAI(X,Y),Y)-DF(PHAI(X,Y),Y)*DF(PSAI(X,Y),X)$
UAL:=NUM(UAL)- (VALDEN:=DEN(UAL))$
UAL:=SUB(DF(U(X,Y),X)=WDFUX,DF(U(X,Y),Y)=WDFUY,DF(U(X,Y),X)=WDFUX,
          DF(U(X,Y),Y)=WDFUY,
          AA(X,Y)=WAA,BB(X,Y)=WBB,AC(X,Y)=WAC,
          U(X,Y)=WU,U(X,Y)=WU,
          DF(AA(X,Y),X)=WDFAA,DF(AA(X,Y),Y)=WDFAA,
          DF(BB(X,Y),X)=WDFBB,DF(BB(X,Y),Y)=WDFBB,
          DF(AC(X,Y),X)=WDFAC,DF(AC(X,Y),Y)=WDFAC,UAL)$
```

```

UALDEN := SUB(DF(U(X,Y),X)=WDFUX,DF(U(X,Y),Y)=WDFUY,DF(U(X,Y),X)=WDFUX,
  DF(U(X,Y),Y)=WDFUY,
  AA(X,Y)=WAA,BB(X,Y)=WBB,AC(X,Y)=WAC,
  U(X,Y)=WU,U(X,Y)=WU,
  DF(AA(X,Y),X)=WDFAA,DF(AA(X,Y),Y)=WDFAY,
  DF(BB(X,Y),X)=WDFBB,DF(BB(X,Y),Y)=WDFBY,
  DF(AC(X,Y),X)=WDFAC,DF(AC(X,Y),Y)=WDFAY,UALDEN)$

ON EXP$
U(X,Y):=-D*AA(X,Y)**2*((A+B+C)*X**2-(A+B+C+D)*(T+1)*X+(B+C+D)*T)
  + AA(X,Y)*BB(X,Y)*((A+B+C-2*D)*X-(A+B)*T+A+C))
  - AA(X,Y)*CC(X,Y)*((1/2)*(2*X-(T+1))*Y-(A+B+C+2*D))
  + BB(X,Y)**2$
U(X,Y):=AA(X,Y)*(D*AA(X,Y)*((A+B+C+3*D)*X-(C+D)*T+B+D))
  -(A+B+C+2*D)*BB(X,Y)
  +(1/2)*CC(X,Y)*Y)$

ON EXP;
DFUX := DF(U(X,Y),X)$
DFUX:= SUB(DF(AA(X,Y),X)=WDFAA,DF(AA(X,Y),Y)=WDFAY,
  DF(BB(X,Y),X)=WDFBB,DF(BB(X,Y),Y)=WDFBY,
  DF(AC(X,Y),X)=WDFAC,DF(AC(X,Y),Y)=WDFAY,
  AA(X,Y)=WAA,BB(X,Y)=WBB,AC(X,Y)=WAC,DFUX)$
DFUY := DF(U(X,Y),Y)$
DFUY:= SUB(DF(AA(X,Y),X)=WDFAA,DF(AA(X,Y),Y)=WDFAY,
  DF(BB(X,Y),X)=WDFBB,DF(BB(X,Y),Y)=WDFBY,
  DF(AC(X,Y),X)=WDFAC,DF(AC(X,Y),Y)=WDFAY,
  AA(X,Y)=WAA,BB(X,Y)=WBB,AC(X,Y)=WAC,DFUY)$
DFUX := DF(U(X,Y),X)$
DFUX:= SUB(DF(AA(X,Y),X)=WDFAA,DF(AA(X,Y),Y)=WDFAY,
  DF(BB(X,Y),X)=WDFBB,DF(BB(X,Y),Y)=WDFBY,
  DF(AC(X,Y),X)=WDFAC,DF(AC(X,Y),Y)=WDFAY,
  AA(X,Y)=WAA,BB(X,Y)=WBB,AC(X,Y)=WAC,DFUX)$
DFUY := DF(U(X,Y),Y)$
DFUY:= SUB(DF(AA(X,Y),X)=WDFAA,DF(AA(X,Y),Y)=WDFAY,
  DF(BB(X,Y),X)=WDFBB,DF(BB(X,Y),Y)=WDFBY,
  DF(AC(X,Y),X)=WDFAC,DF(AC(X,Y),Y)=WDFAY,
  AA(X,Y)=WAA,BB(X,Y)=WBB,AC(X,Y)=WAC,DFUY)$
U(X,Y) := SUB(AA(X,Y)=WAA,BB(X,Y)=WBB,AC(X,Y)=WAC,U(X,Y))$
U(X,Y) := SUB(AA(X,Y)=WAA,BB(X,Y)=WBB,AC(X,Y)=WAC,U(X,Y))$
AA(X,Y):=B1(X)*Y - B2(X)$
BB(X,Y):=(1/4)*B1(X)*(3*X**2 - 2*(T+1)*X + T)*Y**2
  -(1/2)*(5*(A+B+C)*X**4 - 4*((2*A+2*B+C)*T+2*A+B+2*C)*X**3
  +3*((A+B)*T**2+(4*A+2*B+2*C)*T+A+C)*X**2-2*T*((2*A+B)*T+2*A+C)*X+A*T**2)*Y
  + B2(X)*(2*(A+B+C)*X - ((A+B)*T+A+C))
  + (A+B+C+D)*D*B1(X)$
AC(X,Y):=(B1(X)*Y-2*B2(X))/2$
B1(X) := X**3 - (T+1)*X**2 + T*X$
B2(X) := (A+B+C)*X**2 - ((A+B)*T+A+C)*X + A*T$
ON EXP;
B1(X) := B1(X)$
B2(X) := B2(X)$
AA(X,Y) := AA(X,Y)$
BB(X,Y) := BB(X,Y)$
AC(X,Y) := AC(X,Y)$
DFUX := DFUX$
DFUY := DFUY$
DFUX := DFUX$
DFUY := DFUY$
DFAAX := DF(AA(X,Y),X)$
DFAAY := DF(AA(X,Y),Y)$
DFBBX := DF(BB(X,Y),X)$
DFBBY := DF(BB(X,Y),Y)$
DFACX := DF(AC(X,Y),X)$
DFACY := DF(AC(X,Y),Y)$
%OFF EXP;
ON EXP;
U(X,Y) := U(X,Y)$
U(X,Y) := U(X,Y)$

```



```

VAL := VAL/(WU*WU**2)/(WU-WU)/(T*WU-WU);

LET WUX = WU - WUX,
    WU*WDFUX = WU*WDFUX + WUWDFUX,
    WU*WDFUY = WU*WDFUY + WUWDFUY,
    WAA*WDFCCX = WCC*WDFAX + WAAWDFCCX,
    WAA*WDFCCY = WCC*WDFAY + WAAWDFCCY,
    WU**3 = WU*WU**2 + WU*WU**2,
    WU**2*WU = WU*WU*WU + WU*WU**2;

VAL1:=VAL;
CLEAR WUX,WU*WDFUX,WU*WDFUY,WAA*WDFCCX,WAA*WDFCCY,WU**3,WU**2*WU;
CLEAR VAL;

ON EXP;
WU := U(X,Y);
WU := U(X,Y);
WDFUX := DFUX;
WDFUX := DFUX;
WDFUY := DFUY;
WDFUY := DFUY;
WUX := WU - WUX;
WUWDFUX := WU*WDFUX - WU*WDFUX;
WUWDFUY := WU*WDFUY - WU*WDFUY;
WUU := WU - WU;
WDFAY := 2*WDFAY;
ON GCD;
WUX := WUX$
WUWDFUX := WUWDFUX$
WUWDFUY := WUWDFUY$
WUU := WUU$
DFBBY := DFBBY$
OFF GCD;
VAL1 := VAL1/WAA**2$
ARRAY WORK(6);
K := COEFF(VAL1, WAA, WORK);
VAL1 := 0$
ON GCD;
WORK(0):=WORK(0)$
WORK(1):=WORK(1)$
WORK(2):=WORK(2)$
WORK(3):=WORK(3)$
WORK(4):=WORK(4)$
WORK(5):=WORK(5)$
WORK(6):=WORK(6)$
OFF GCD;
ARRAY WORK1(6),WORK2(10),WORK3(10),WORK4(10),WORK5(10),WORK6(10),WORK7(10),
    WORK8(10);

ALGEBRAIC PROCEDURE EVALUATE(ARG);
BEGIN SCALAR S0,S1,S2,S3,S4,S5,S6,K0,K1,K2,K3,K4,K5,K6;
    K0 := COEFF(ARG, WBB, WORK1);
    S0 := 0;
    FOR J0 := K0 STEP -1 UNTIL 0 DO BEGIN;
        K1 := COEFF(WORK1(J0), WAC, WORK2);
        S1 := 0;
        FOR J1 := K1 STEP -1 UNTIL 0 DO BEGIN;
            S2 := 0;
            K2 := COEFF(WORK2(J1), WDFAX, WORK3);
            WORK2(J1) := 0;
            FOR J2 := K2 STEP -1 UNTIL 0 DO BEGIN;
                S3 := 0;
                K3 := COEFF(WORK3(J2), WDFBBX, WORK4);
                WORK3(J2) := 0;
                FOR J3 := K3 STEP -1 UNTIL 0 DO BEGIN;
                    S4 := 0;
                    K4 := COEFF(WORK4(J3), WDFACX, WORK5);
                    WORK4(J3) := 0;
                    FOR J4 := K4 STEP -1 UNTIL 0 DO BEGIN;

```

```

S5 := 0;
K5 := COEFF(WORK5(J4), WDFBBY, WORK6);
WORK5(J4) := 0;
FOR J5 := K5 STEP -1 UNTIL 0 DO BEGIN;
  S6 := 0;
  K6 := COEFF(WORK6(J5), WDFACY, WORK7);
  WORK6(J5) := 0;
  WRITE "J1 = ", J1, ", J2 = ", J2,
        ", J3 = ", J3, ", J4 = ", J4, ", J5 = ", J5, ", K6 = ", K6;
  FOR J6 := K6 STEP -1 UNTIL 0 DO BEGIN;
    S6 := S6 * DFACY + WORK7(J6);
    WORK7(J6) := 0;
  END;
  S5 := S5 * DFBBY + S6;
  S4 := S4 * DFACX + S5;
  S3 := S3 * DFBBX + S4;
  S2 := S2 * DFAAX + S3;
  S1 := S1 * AC(X,Y) + S2;
  S0 := S0 * BB(X,Y) + S1;
END;
RETURN S0
END;
WORK(0) := EVALUATE(WORK(0)/WBB**5)/AA(X,Y)$
WORK(1) := (EVALUATE(WORK(1)/WBB**4)+WORK(0)*BB(X,Y))/AA(X,Y)$
WORK(0) := 0$
WORK(2) := (EVALUATE(WORK(2)/WBB**3)+WORK(1)*BB(X,Y))/AA(X,Y)$
WORK(1) := 0$
WORK(3) := (EVALUATE(WORK(3)/WBB**2)+WORK(2)*BB(X,Y))/AA(X,Y)$
WORK(2) := 0$
WORK(4) := (EVALUATE(WORK(4)/WBB)+WORK(3)*BB(X,Y))/AA(X,Y)$
WORK(3) := 0$
WORK(5) := (EVALUATE(WORK(5))+WORK(4)*BB(X,Y))/AA(X,Y)$
WORK(4) := 0$
WORK(6) := EVALUATE(WORK(6))+WORK(5);
WORK(5) := 0$
END;

```

WORK(6) := EVALUATE(WORK(6))+WORK(5);

J1 = 3, J2 = 0, J3 = 0, J4 = 1, J5 = 0, K6 = 0
 J1 = 3, J2 = 0, J3 = 0, J4 = 0, J5 = 0, K6 = 1
 J1 = 2, J2 = 0, J3 = 0, J4 = 1, J5 = 0, K6 = 0
 J1 = 2, J2 = 0, J3 = 0, J4 = 0, J5 = 0, K6 = 1
 J1 = 1, J2 = 0, J3 = 0, J4 = 1, J5 = 0, K6 = 0
 J1 = 1, J2 = 0, J3 = 0, J4 = 0, J5 = 0, K6 = 1
 J1 = 0, J2 = 0, J3 = 0, J4 = 0, J5 = 0, K6 = 1
 WORK(6) := 0 ←

一番最後の結果
めつたく 0 になっている。